Dr. Emanuel Scheidegger
Dr. Christoph Kawan

Topologie
SS 10
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Übungsblatt 10

Vektorbündel

37. Die Hopf–Invariante.
Es sei $f : S^{2n-1} \to S^n$ eine glatte Abbildung, α ein Erzeuger von $\mathrm{H}^n(S^n)$. Dann existiert ein $\omega \in \Omega^{n-1}(S^{2n-1})$, so daß $f^*\alpha = \mathrm{d}\omega$. Wir definieren die Hopf–Invariante von f durch $H(f) = \int_{S^{2n-1}} \omega \wedge \mathrm{d}\omega$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) Die Definition von $H(f)$ ist unabhängig von der Wahl von ω.
    (b) (1 Punkt) Für n ungerade ist $H(f) = 0$.
    (c) (1 Punkt) Homotope Abbildungen besitzen dieselbe Hopf–Invariante.
    (d) (1 Punkt) Die Hopf–Invariante für die Hopf–Faserung $f : S^3 \to S^2$ ist 1.

38. Lineare Algebra von Vektorbündeln.
Es seien E, F Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\bigwedge^q E$, E^* und $\mathrm{Hom}(E, F)$ Vektorbündel über M sind, indem Sie eine lokale Trivialisierung konstruieren und die Übergangsabbildungen angeben.
    (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathrm{Hom}(E, F) \cong E \otimes F^*$.
    (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß gilt: $\Omega^q(M) = \Gamma(M, \bigwedge^q T^*M)$, wobei T^*M das Kotangentialbündel ist, d.h. $T^*M = (TM)^*$.

39. Tautologisches Bündel auf $\mathbb{RP}^n$.
Es sei $E = \{(\ell, x) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x \in \ell\}$. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (2 Punkte) E ist ein Geradenbündel über $\mathbb{RP}^n$. Das ist das tautologische oder universelle Bündel.
    (b) (1 Punkt) $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$.
    (c) (1 Punkt) Der Totalraum von $E^* \to \mathbb{RP}^1$ ist ein offenes Möbiusband.

40. Unterbündel und Normalenbündel.

(a) (1 Punkt) Es seien E, E' Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M mit Übergangsabbildungen $g_{\alpha\beta}$ bzw. $g'_{\alpha\beta}$ bezüglich einer offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von M. Zeigen Sie, daß gilt: Falls für alle $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ die Matrix $g'_{\alpha\beta}$ von der Form $\begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & * \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$ ist, dann ist E ein Unterbündel von E', d.h. es gibt eine kanonische Injektion $E \to E'$.

(b) (1 Punkt) Es sei E ein Unterbündel von E', dann existieren Übergangsabbildungen von der Form in Aufgabe a) und $h_{\alpha\beta}$ sind die Übergangsabbildungen des Kokerns $G = E'/E$.

(c) (1 Punkt) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S eine Untermannigfaltigkeit mit Inklusion $i : S \to M$. Wir definieren das Normalenbündel von S in M durch $N_{S/M} = \operatorname{coker}(TS \to i^*TM = TM|_S)$. Bestimmen Sie eine Basis von Schnitten von $N_{S/M}$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß das Normalenbündel von S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$ trivial ist.

Abgabetermin: Freitag, 8. 7. 2010 um 10:00 Uhr.